数理解析研究所講究録
第1864巻 2013年 39-49



# サービスタイムを伴う複占市場における価格競争

大阪府立大学大学院　理学系研究科　情報数理科学専攻
高山 寛史　北條 仁志
Hirofumi Takayama　Hitoshi Hohjo
Department of Mathematics and Information Sciences,
Graduate School of Science,
Osaka Prefecture University

## 1　はじめに

本研究では、複占小売市場において両店舗の営業時間を考慮し、一方の店舗にサービスタイムを導入したモデルについて考察する。Shy and Stenbacka[2] でのデイタイム営業の対称な営業時間のモデルを扱うが、我々が新たに提案するモデルでは店舗Aに2つのサービスタイムを導入する。彼らのモデルでは両店舗の販売価格が決定変数であったが、我々のモデルでは店舗Aの通常価格はすでに与えられた状態において店舗Aの割引率、つまり割引販売価格と店舗Bの通常価格を決定変数として扱う。店舗Aのサービスタイムは開店時刻直後と閉店時刻直前に設ける。そうすることで、営業時間外の潜在的な買い物客をより多く集客することができるからである。買い物客は、店舗の営業時間外により、理想的な時間に買い物ができない時は、買い物時間を店舗の閉店時間に早めて買い物を行うか次の日の開店時間に遅らせて買い物を行うというように行動する。サービスタイム導入により各店舗の需要を調べ、各店舗の利得関数からサービスタイムを導入した店舗については最適な価格の割引率を求め、通常価格で営業している店舗については最適な価格を求め、両者の販売価格に関する均衡について考察する。

## 2　仮定と記号

### 2.1　仮定

本稿では次のような仮定を持つモデルについて考える。

1. 複占市場においてある商品を販売している店舗A,Bがある。
2. 市場を数直線 $[0,1]$ で表す。
3. 店舗Aは $x=0$、店舗Bは $x=1$ に位置している。
4. 店舗はそれぞれデイタイムに営業している。
5. 両店舗ともすべての買い物客に販売できるだけの十分な商品の量を持っている。
6. 店舗Aは時刻 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して $t=0$ から $t=s$ の間と時刻 $t=\frac{1}{2}-s$ から $t=\frac{1}{2}$ の間の2度割引された価格で販売するサービスタイムを実施する。
7. 買い物客は数直線 $[0,1]$ 上に一様に分布している。
8. 時刻 $t=0$ から $t=\frac{1}{2}$ の間 (daytime) に購入する買い物は密度 $n_1$ で、時刻 $t=\frac{1}{2}$ から $t=1$ の間 (nighttime) に購入する買い物客は密度 $n_2$ $(n_1>n_2)$ で一様に分布している。
9. 営業時間外により買い物客は理想的な時間に買い物ができないならば、買い物

時間を店舗の閉店時間に早める、あるいは次の日の開店時間に遅らせるというようにふるまう。

10. 買い物客が商品を購入することによって得られる効用は同一である。

### 2.2 記号

本稿を通じて以下のような記号を用いる。

$\beta$：商品の購入によって得られる買い物客の効用

$P_A$：店舗 $A$ の販売価格

$P_B$：店舗 $B$ の販売価格

$\alpha P_A$：店舗 $A$ の割引販売価格

$\lambda$：買い物客の店舗までの移動に伴う単位距離当たりの移動コスト

$\tau$：買い物客の営業時間までの時間移動に伴う単位時間当たりの待ち時間コスト

$t$：買い物客が商品を購入する時間

$c$：商品 1 単位あたりの原価

$x$：買い物客の位置　$x \in [0,1]$

$s$：割引価格で販売する時間の長さ

$k$：営業に対するオペレーティングコスト

$U_A(x,t)$：位置 $x$ にいる買い物客が時刻 $t$ に店舗 A で購入したときの効用関数

$U_B(x,t)$：位置 $x$ にいる買い物客が時刻 $t$ に店舗 B で購入したときの効用関数

$\pi_A(\alpha, P_B)$：店舗 A の割引率 $\alpha$ と店舗 B の販売価格 $P_B$ が与えられたときの店舗 A の単位時間あたりの利得関数

$\pi_B(\alpha, P_B)$：店舗 A の割引率 $\alpha$ と店舗 B の販売価格 $P_B$ が与えられたときの店舗 B の単位時間あたりの利得関数

## 3 モデルの定式化

### 3.1 客数の導出

我々のモデルにおける目的関数を導出するためには、店舗 A の割引販売価格 $\alpha P_A$ と店舗 B の通常販売価格 $P_B$ が与えられたときに、店舗 A において割引販売価格 $\alpha P_A$ で商品を購入する買い物客の総数、同店舗において通常の販売価格 $P_A$ で商品を購入する買い物客の総数、および店舗 B において通常の販売価格 $P_B$ で商品を購入する買い物客の総数を求めなければならない。位置 $x \in [0,1]$ にいる買い物客が時刻 $t$ に購買行動を取ったとき、店舗 A と店舗 B のどちらで商品を購入するかを決定する必要がある。各時刻において購買行動をとった買い物客の分岐点となる位置を調べる。

(i) $0 \leq t < s$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客の中で、店舗 A への買い物客はサービスタイムに商品を購入することになる。店舗 A への買い物客は割引販売価格で商品を購入し、店舗 B への買い物客は通常価格で商品を購入することができる。したがって、店舗 A,B での効用関数はそれぞれ $U_A(x,t) = \beta - \alpha P_A - \lambda x$、$U_B(x,t) = \beta - P_B - \lambda(1-x)$ となる。同様に境界点を求

めると

$$\bar{x}=\frac{P_B-\alpha P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}$$

である。

(ii) $s \leq t < s+\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客の中で、店舗Aへの買い物客はサービスタイムまでに買い物時間を早めて商品を購入することになる。この場合には店舗Aへの買い物客には時刻 $t$ から時刻 $s$ まで買い物時間を早めることによる時間コストが課せられる。店舗Aへの買い物客は割引販売価格で商品を購入し、店舗Bへの買い物客は通常価格で商品を購入することができる。したがって、店舗A,Bでの効用関数はそれぞれ $U_A(x,t)=\beta-\alpha P_A-\lambda x-\tau(t-s)$、$U_B(x,t)=\beta-P_B-\lambda(1-x)$ となる。同様に境界点を求めると

$$\tilde{x}=\frac{P_B-\alpha P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}+\frac{\tau(s-t)}{2\lambda}$$

である。

(iii) $s+\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau} \leq t < \frac{1}{2}-s-\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客は店舗A,Bで通常価格で商品を購入する。したがって、店舗A,Bでの効用関数はそれぞれ $U_A(x,t)=\beta-P_A-\lambda x$、$U_B(x,t)=\beta-P_B-\lambda(1-x)$ となる。同様に境界点を求めると

$$\hat{x}=\frac{P_B-P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}$$

である。

(iv) $\frac{1}{2}-s-\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau} \leq t < \frac{1}{2}-s$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客の中で、店舗Aへの買い物客はサービスタイムまで買い物時間を遅らせて商品を購入することになる。この場合には店舗Aへの買い物客には時刻 $t$ から時刻 $\frac{1}{2}-s$ までの待ち時間コストが課せられる。店舗Aへの買い物客は割引販売価格で商品を購入し、店舗Bへの買い物客は通常価格で商品を購入することができる。したがって、店舗A,Bでの効用関数はそれぞれ $U_A(x,t)=\beta-\alpha P_A-\lambda x-\tau\left(\frac{1}{2}-t-s\right)$、$U_B(x,t)=\beta-P_B-\lambda(1-x)$ となる。同様に境界点を求めると

$$\check{x}=\frac{P_B-\alpha P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}-\frac{\tau}{4\lambda}+\frac{\tau(s+t)}{2\lambda}$$

である。

(v) $\frac{1}{2}-s \leq t < \frac{1}{2}$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客の中で、店舗Aへの買い物客はのサービスタイムに商品を購入することになる。店舗Aへの買い物客は割引販売価格で商品を購入し、店舗Bへの買い物客は通常価格で商品を購入することができる。したがって、店舗A,Bでの効用関数はそれぞれ $U_A(x,t)=\beta-\alpha P_A-\lambda x$、$U_B(x,t)=\beta-P_B-\lambda(1-x)$ となる。同様に境界点を求めると

$$\bar{x}=\frac{P_B-\alpha P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}$$

である。

(vi) $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客は店舗A,Bの閉店時間まで買い物時間を早めて商品を購入することになる。この場合には時刻 $t$ から時刻 $\frac{1}{2}$ まで買い物時間を早めることによる待ち時間コストが課せられる。店舗Aへの買い物客は割引販売価格で商品を購入し、店舗B

への買い物客は通常価格で商品を購入することができる。したがって、店舗 A,B での効用関数はそれぞれ $U_A(x,t)=\beta-\alpha P_A-\lambda x-\tau(t-\frac{1}{2})$、$U_B(x,t)=\beta-P_B-\lambda(1-x)-\tau(t-\frac{1}{2})$ となる。同様に境界点を求めると

$$\bar{x}=\frac{P_B-\alpha P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}$$

である。

(vii) $\frac{3}{4}\leq t\leq 1$

この時刻に購買行動に移ろうとするすべての買い物客は店舗 A,B の開店時間まで待ち商品を購入することになる。この場合には時刻 $t$ から次の日の閉店時刻 1 までの待ち時間コストが課せられる。店舗 A への買い物客は割引販売価格で商品を購入し、店舗 B への買い物客は通常価格で商品を購入することができる。したがって、店舗 A,B での効用関数はそれぞれ $U_A(x,t)=\beta-\alpha P_A-\lambda x-\tau(1-t)$、$U_B(x,t)=\beta-P_B-\lambda(1-x)-\tau(1-t)$ となる。各 $t$ に対して $U_A=U_B$ となる位置 $x$ が、店舗 A で購入か店舗 B で購入かに分かれる買い物客の位置の境界点であり、それを求めると

$$\bar{x}=\frac{P_B-\alpha P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}$$

である。

店舗 A において割引販売価格 $\alpha P_A$ で商品を購入する客の総数 $D_{A1}$ は

$$\begin{aligned} & n_1\int_0^s \bar{x}dt+n_1\int_s^{s+\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}}\tilde{x}dt+n_1\int_{\frac{1}{2}-s-\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}}^{\frac{1}{2}-s}\check{x}dt+n_1\int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}}\bar{x}dt+n_1\int_{\frac{1}{2}}^{1}\bar{x}dt \\ = \ & 2n_1s\bar{x}+n_1\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}(\bar{x}+\hat{x})+\frac{1}{2}n_2\bar{x} \end{aligned} \tag{1}$$

である。

店舗 A において通常販売価格 $P_A$ で商品を購入する客の総数 $D_{A2}$ は

$$n_1\int_{s+\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}}^{\frac{1}{2}-s-\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}}\hat{x}dt \ = \ n_1\left(\frac{1}{2}-2s-\frac{2P_A(1-\alpha)}{\tau}\right)\hat{x} \tag{2}$$

である。

店舗 B で商品を購入する客の総数 $D_B$ は

$$\begin{aligned} & \frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}-(D_{A1}+D_{A2}) \\ = \ & \frac{1}{2}(n_1+n_2)(1-\bar{x})+n_1(\bar{x}-\hat{x})\left(\frac{1}{2}-2s-\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

である。

### 3.2 目的関数と制約条件

この節において我々が提案したモデルから最適化問題の導出をはかる。店舗 A は客数 $D_{A1}$ に対して割引販売価格 $\alpha P_A$ で販売し、客数 $D_{A2}$ に対して通常価格 $P_A$ で販売するので、店舗 A の利得関数 $\pi_A(\alpha,P_B)$ は

$$\pi_A(\alpha,P_B)=(\alpha P_A-c)D_{A1}+(P_A-c)D_{A2}-k$$

となる。また、店舗Bの利得関数 $\pi_B(\alpha, P_B)$ は客数 $D_B$ に対して通常価格 $P_B$ で販売するので

$$\pi_B(\alpha, P_B) = (P_B - c)D_B - k$$

となる。

本モデルでは、$0 \leq \hat{x} \leq \bar{x} \leq 1$ の場合を扱っている。$\hat{x} \geq 0$ より $P_B \geq P_A - \lambda$ を得て、$\bar{x} \leq 1$ より $P_B \leq \alpha P_A + \lambda$ と $\frac{P_B - \lambda}{P_A} \leq \alpha$ を得る。割引販売価格が原価を下回らないようにしなければならないので $\alpha P_A \geq c$ より $\alpha \geq \frac{c}{P_A}$ を得る。$s + \frac{P_A(1-\alpha)}{\tau} \leq \frac{1}{4}$ より $1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A} \leq \alpha$ を得る。

よって、我々が提案したモデルは次のような問題として定式化される：
2つの意思決定者A,Bにおいて、
店舗Aは制約条件

$$max\left\{1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}, \frac{c}{P_A}, \frac{P_B - \lambda}{P_A}\right\} \leq \alpha \leq 1 \tag{4}$$

の下で目的関数

$$\pi_A(\alpha, P_B) = (\alpha P_A - c)D_{A1} + (P_A - c)D_{A2} - k \tag{5}$$

を最大にし、店舗Bは制約条件

$$max\{P_A - \lambda, c\} \leq P_B \leq \alpha P_A + \lambda \tag{6}$$

の下で目的関数

$$\pi_B(\alpha, P_B) = (P_B - c)D_B - k \tag{7}$$

を最大にするような均衡解 $(\alpha, P_B)$ を求めることである。

# 4 解析

この節では、前節で定式化した最適化問題について、目的関数 $\pi_A(\alpha, P_B)$ および $\pi_B(\alpha, P_B)$ を解析し、均衡解 $(\alpha, P_B)$ を求める。

## 4.1 最適割引率の導出

まず、店舗Aの利得関数 $\pi_A(\alpha, P_B)$ についての性質を調べる。$\pi_A(\alpha, P_B)$ は(5)式に(1)、(2)式を代入することで得られる。

$$\begin{aligned}
\pi_A(\alpha, P_B) &= (\alpha P_A - c)D_{A1} + (P_A - c)D_{A2} - k \\
&= \left\{\left(2n_1 s + \frac{1}{2}n_2\right)\left(\frac{P_B - P_A + (1-\alpha)P_A}{2\lambda} + \frac{1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + n_1 \frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}\left(\frac{2P_B - 2P_A + (1-\alpha)P_A}{2\lambda} + 1\right)\right\}(\alpha P_A - c) \\
&\quad + n_1\left(\frac{1}{2} - 2s - \frac{2P_A(1-\alpha)}{\tau}\right)\left(\frac{P_B - P_A}{2\lambda} + \frac{1}{2}\right)(P_A - c) - k
\end{aligned}$$

$\pi_A(\alpha, P_B)$ について性質を見てみると、$P_B$ が与えられたとき $\alpha$ について 3 次関数で 3 次の係数が正であることがわかる。$\pi_A(\alpha, P_B)$ の 1 階の偏導関数を求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha} &= \left\{-\left(2n_1 s+\frac{1}{2}n_2\right)\left(\frac{P_A}{2\lambda}\right)-\frac{n_1 P_A}{\tau}\left(\frac{2P_B-2P_A+(1-\alpha)P_A}{2\lambda}+1\right)\right. \\ &\left. -n_1\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}\frac{P_A}{2\lambda}\right\}(\alpha P_A-c)+\left\{\left(2n_1 s+\frac{1}{2}n_2\right)\left(\frac{P_B-P_A+(1-\alpha)P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)\right. \\ &\left. +n_1\frac{P_A(1-\alpha)}{\tau}\left(\frac{2P_B-2P_A+(1-\alpha)P_A}{2\lambda}+1\right)\right\}P_A \\ &+n_1\frac{2P_A}{\tau}\left(\frac{P_B-P_A}{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)(P_A-c)\end{aligned}$$

となる。最適性の必要条件 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}=0$ について解くと

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^2+\frac{2(2s\tau+\frac{n_2}{2n_1}\tau+2P_B-3P_A+2\lambda+c)}{3P_A}(1-\alpha)& \\ -\frac{(2s\tau+\frac{n_2}{2n_1}\tau)(2P_A-P_B-c-\lambda)}{3P_A^2}&=0\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1}+2P_B+2\lambda+c}{3P_A} \\ &\pm\frac{\sqrt{(2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1}+2P_B-3P_A+2\lambda+c)^2-3(2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1})(P_B-2P_A+\lambda+c)}}{3P_A}\end{aligned}$$

である。ここで、ルートの中身は常に

$$(2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1}+2P_B-3P_A+2\lambda+c)^2-3(2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1})(P_B-2P_A+\lambda+c)>0$$

であるから、方程式 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}=0$ は 2 つの実数解をもつ。方程式 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}=0$ の 2 つの解のうち、小さいほうの解 (極大値) を $\alpha^0$ とおく。

次に、関数 $\pi_A$ の概略図を確認するために端点の傾きを調べる。

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\frac{c}{P_A}} &= \left\{\left(2n_1 s+\frac{1}{2}n_2\right)\frac{P_B-c+\lambda}{2\lambda}+n_1\frac{(P_A-c)(2P_B-P_A+2\lambda-c)}{2\lambda\tau}\right\}P_A \\ &+\frac{2n_1 P_A(P_B-P_A+\lambda)}{2\lambda\tau}(P_A-c)>0 \\ \left.\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=1} &= \frac{P_A}{2\lambda}\left(2n_1 s+\frac{1}{2}n_2\right)(P_B-2P_A+\lambda+c)\end{aligned}$$

となり、次のことが言える。

$$P_B-2P_A+\lambda+c\geq 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=1}\geq 0$$

$$P_B-2P_A+\lambda+c<0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=1}<0$$

つまり、$P_B-2P_A+\lambda+c<0$ の場合、$\frac{c}{P_A}\leq\alpha\leq 1$ に極大値が存在する。
よって、店舗 A の利得関数を最大にする割引率は以下のようになる。

(I) $P_B - 2P_A + \lambda + c \geq 0$ のとき

$$\alpha^0 - 1 = \frac{2s\tau + \frac{n_2\tau}{2n_1} + 2P_B - 3P_A + 2\lambda + c}{3P_A} - \frac{\sqrt{(2s\tau + \frac{n_2\tau}{2n_1} + 2P_B - 3P_A + 2\lambda + c)^2 - 3(2s\tau + \frac{n_2\tau}{2n_1})(P_B - 2P_A + \lambda + c)}}{3P_A} > 0$$

より $\frac{c}{P_A} \leq \alpha \leq 1$ において $\pi_A(\alpha, P_B)$ は $\alpha$ に関して単調に増加する。従って、

$$\alpha^* = 1$$

(II) $P_B - 2P_A + \lambda + c < 0$ のとき
(1A)$1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A} \leq \frac{P_B - \lambda}{P_A}$ かつ $\alpha^0 \leq \frac{P_B - \lambda}{P_A}$ のとき

$$\alpha^* = \frac{P_B - \lambda}{P_A}$$

(2A)$\frac{P_B - \lambda}{P_A} < 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ かつ $\alpha^0 \leq 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ のとき

$$\alpha^* = 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$$

(3A)$1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A} < \alpha^0$ かつ $\frac{P_B - \lambda}{P_A} < \alpha^0$ のとき

$$\alpha^* = \alpha^0$$

## 4.2 最適価格の導出

店舗 B の利得関数 $\pi_B(\alpha, P_B)$ についての性質を調べる。$\pi_B(\alpha, P_B)$ は (7) 式に (3) 式を代入することで得られる。

$$\begin{aligned}\pi_B(\alpha, P_B) &= (P_B - c)D_B - k \\ &= \left\{\frac{1}{4}n_1 + \frac{1}{4}n_2 - \frac{n_1(1-\alpha)^2}{2\lambda\tau}P_A^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_1 + n_2\alpha - 4n_1 s(1-\alpha)}{4\lambda}P_A - \frac{n_1 + n_2}{4\lambda}P_B\right\}(P_B - c) - k\end{aligned}$$

$\pi_B(\alpha, P_B)$ についての性質を見ると、$\alpha$ が与えられたとき $P_B$ について 2 次関数で

$$\frac{\partial^2 \pi_B}{\partial P_B^2} = -\frac{n_1 + n_2}{2\lambda} < 0$$

より $\pi_B(\alpha, P_B)$ は凹関数であることがわかる。$\pi_B(\alpha, P_B)$ の 1 階の偏導関数を求めると

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial P_B} = -\frac{n_1(1-\alpha)^2}{2\lambda\tau}P_A^2 + \frac{n_1 + n_2\alpha - 4n_1 s(1-\alpha)}{4\lambda}P_A + \frac{(n_1 + n_2)(c + \lambda - 2P_B)}{4\lambda}$$

となる。最適性の必要条件 $\frac{\partial \pi_B}{\partial P_B} = 0$ を解き、その解を $P_B^0$ とおく。

$$P_B^0 = \frac{1}{n_1 + n_2}\left\{-\frac{n_1(1-\alpha)^2}{\tau}P_A^2 + \frac{n_1 + n_2\alpha - 4n_1 s(1-\alpha)}{2}P_A\right\} + \frac{\lambda + c}{2}$$

よって、店舗Bの利得関数を最大にする価格は以下のようになる。
(1B)$P_B^0 \leq P_A - \lambda$ かつ $c \leq P_A - \lambda$ のとき

$$P_B^* = P_A - \lambda$$

(2B)$P_B^0 \leq c$ かつ $P_A - \lambda < c$ のとき

$$P_B^* = c$$

(3B)$\alpha P_A + \lambda \leq P_B^0$ のとき

$$P_B^* = \alpha P_A + \lambda$$

(4B)$max\{P_A - \lambda, c\} < P_B^0 < \alpha P_A + \lambda$ のとき

$$P_B^* = P_B^0$$

### 4.3 均衡解の導出

前述のように得られた結果を用いて割引率と価格との均衡を求める。
(I) $P_B - 2P_A + \lambda + c \geq 0$ のとき
これは、$\alpha = 1$ の場合である。このとき、$P_B^0 = \frac{P_A+\lambda+c}{2}$ である。
$max\{P_A - \lambda, c\} \leq P_B \leq \alpha P_A + \lambda$ に対して $\pi_B(\alpha, P_B)$ の境界における増減を調べる。$P_B = \alpha P_A + \lambda$, $\alpha = 1$ において

$$\left.\frac{\partial \pi_B}{\partial P_B}\right|_{P_B = P_A+\lambda, \alpha=1} = \frac{(n_1+n_2)\{-(P_A - c) - \lambda\}}{4\lambda} < 0$$

である。
(I-i) $P_A - \lambda \leq c$ のとき
$P_B = c$, $\alpha = 1$ において

$$\left.\frac{\partial \pi_B}{\partial P_B}\right|_{P_B = c, \alpha=1} = \frac{(n_1+n_2)(P_A - c + \lambda)}{4\lambda} > 0$$

このとき、$\alpha^* = 1$, $P_B^* = \frac{P_A+\lambda+c}{2}$ である。
(I-ii) $P_A - \lambda > c$ のとき
(I-ii-1) $P_A - \lambda < P_B^0 = \frac{P_A+\lambda+c}{2}$ のとき
制約条件の下での最大点は $P_B = \frac{P_A+\lambda+c}{2}$ になるが、$P_B - 2P_A + \lambda + c = -\frac{3}{2}(P_A - \lambda - c) < 0$ となる。よって、$P_B - 2P_A + \lambda + c \geq 0$ に矛盾する。従って、このケースでの均衡解はない。
(I-ii-2) $P_A - \lambda \geq P_B^0 = \frac{P_A+\lambda+c}{2}$ のとき
制約条件の下での最大点は $P_B = P_A - \lambda$ になるが、$P_B - 2P_A + \lambda + c = -(P_A - c) < 0$ となる。よって、$P_B - 2P_A + \lambda + c \geq 0$ に矛盾する。従って、このケースでの均衡解はない。
(II) $P_B - 2P_A + \lambda + c < 0$ のとき
・(1A) と (1B) の組み合わせにおいては

$$\alpha^* = 1 - \frac{2\lambda}{P_A}, P_B^* = P_A - \lambda$$

が均衡解である。
・(1A) と (2B) の組み合わせにおいては $P_A - \lambda < c$ より $c - P_A + \lambda > 0$ である。$\alpha = \frac{P_B-\lambda}{P_A}$,

$P_B = c$ において

$$\left.\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\frac{P_B-\lambda}{P_A}, P_B=c} = \frac{P_A}{2}(2n_1 s + \frac{1}{2}n_2) + \frac{n_1 P_A}{2\tau}(c - P_A + \lambda + 2\lambda) + \frac{n_1 P_A}{2\tau}(P_A - c + \lambda)$$
$$+P_A(2n_1 s + \frac{1}{2}n_2) + \frac{n_1 P_A}{2\lambda\tau}(P_A - c + \lambda)(c - P_A + \lambda + 2\lambda)$$
$$+\frac{2n_1 P_A}{2\lambda\tau}(c - P_A + \lambda)(P_A - c) > 0$$

である。ゆえに、$\frac{P_B-\lambda}{P_A} < \alpha^0$ となるので条件 $\alpha^0 < \frac{P_B-\lambda}{P_A}$ に矛盾する。よって、このケースでの均衡解はない。

・(1A) と (4B) の組み合わせにおいては $\alpha = \frac{P_B-\lambda}{P_A}$ となり、$P_B^0 < P_A - \lambda$ なので $P_A - \lambda < P_B^0$ を満たさない。よって、このケースでの均衡解はない。

・(2A) と (1B) の組み合わせにおいては

$$\alpha^* = 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}, P_B^* = P_A - \lambda$$

が均衡解である。

・(2A) と (2B) の組み合わせにおいては $\frac{P_B-\lambda}{P_A} < 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}, P_B = c$ より、$-(1-4s)\tau + 4(P_A - c + \lambda) > 0$ と言える。$-(1-4s)\tau + 4(P_A - c + \lambda) > 0$ より $-(1-4s)\tau + 8(P_A - c + \lambda) > 0$ である。$\alpha = 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ において

$$\left. c - P_B^0 \right|_{\alpha=1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}} = -\frac{1}{16}\{-(1-4s)\tau + 8(P_A - c + \lambda)\} < 0$$

である。よって、$c < P_B^0$ となるので条件 $P_B^0 < c$ に矛盾する。従って、このケースでの均衡解はない。

・(2A) と (3B) の組み合わせにおいては $\alpha = 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$、$P_B = P_A - \frac{(1-4s)\tau}{4} + \lambda$ となる。このとき、条件 $\frac{P_B-\lambda}{P_A} < 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ については $1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A} - \frac{P_A - \frac{(1-4s)}{4}\tau + \lambda - \lambda}{P_A} = 0$ となって、条件 $\frac{P_B-\lambda}{P_A} < 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ を満たさない。従って、このケースでの均衡解はない。

・(2A) と (4B) の組み合わせにおいては

$$\alpha^* = 1 - \frac{(1-4s)\tau}{4P_A}, P_B^* = P_B^0$$

が均衡解である。

・(3A) と (1B) の組み合わせにおいては

$$\alpha^* = \alpha^0, P_B^* = P_A - \lambda$$

が均衡解である。

・(3A) と (4B) の組み合わせにおいては

$$\alpha^* = \alpha^0, P_B^* = P_B^0$$

が均衡解である。

このときは、$\alpha^0$ は $P_B$ を、$P_B^0$ は $\alpha$ を用いて書かれているので、新たにそれらの方程式を解き直す必要がある。$\alpha^0$ の $P_B$ に $P_B^0$ を代入すると次の方程式が得られる。

$$\frac{n_1 P_A (1-\alpha)^3}{\tau(n_1+n_2)} - \left\{3 - \frac{4sn_1 + n_2}{n_1 + n_2}\right\}(1-\alpha)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{P_A}\left(2s\tau+\frac{n_2}{2n_1}\tau-\frac{11}{4}P_A+\frac{9}{4}\lambda+\frac{5}{4}c\right)(1-\alpha)\\
&-\frac{(s+\frac{n_2}{4n_1})\tau(5P_A-3c-3\lambda)}{P_A^2}=0
\end{aligned}
$$

$\alpha^*$ はこの方程式の解であり、$P_B^*=P_B^0|_{\alpha=\alpha^*}$ である。
まとめると均衡に関する以下の結果が得られる。
定理

$$
\begin{aligned}
\alpha^0(P_B) &= \frac{2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1}+2P_B+2\lambda+c}{3P_A}\\
&-\frac{\sqrt{(2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1}+2P_B-3P_A+2\lambda+c)^2-3(2s\tau+\frac{n_2\tau}{2n_1})(P_B-2P_A+\lambda+c)}}{3P_A},
\end{aligned}
$$

$$
P_B^0(\alpha)=\frac{1}{n_1+n_2}\left\{-\frac{n_1(1-\alpha)^2}{\tau}P_A^2+\frac{n_1+n_2\alpha-4n_1s(1-\alpha)}{2}P_A\right\}+\frac{\lambda+c}{2}
$$

とおく。我々の提案したモデルにおいて以下が成り立つ。

(a) $P_A-\lambda\le c$ ならば、 $\alpha^*=1, P_B^*=\frac{P_A+\lambda+c}{2}$ は均衡である。

(b) $P_A-\lambda\ge c$ かつ $P_B^0(1-\frac{2\lambda}{P_A})\le P_A-\lambda$ かつ $8\lambda\le(1-4s)\tau$ かつ $\alpha_0(P_A-\lambda)\le 1-\frac{2\lambda}{P_A}$ ならば、$\alpha^*=1-\frac{2\lambda}{P_A}, P_B^*=P_A-\lambda$ は均衡である。

(c) $P_A-\lambda\ge c$ かつ $P_B^0(1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A})\le P_A-\lambda$ かつ $8\lambda>(1-4s)\tau$ かつ $\alpha_0(P_A-\lambda)\le 1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ ならば、$\alpha^*=1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}, P_B^*=P_A-\lambda$ は均衡である。

(d) $P_B^0(1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A})<P_A-\frac{(1-4s)\tau}{4}$ かつ $\alpha^0(P_B^0(1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}))\le 1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}$ かつ $\max\{P_A-\lambda, c\}<P_B^0(1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A})<P_A-\frac{(1-4s)\tau}{4}+\lambda$ ならば、$\alpha^*=1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}, P_B^*=P_B^0(1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A})$ は均衡である。

(e) $1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}<\alpha^0(P_A-\lambda)$ かつ $1-\frac{2\lambda}{P_A}<\alpha^0(P_A-\lambda)$ かつ $P_B^0(\alpha^0(P_A-\lambda))\le P_A-\lambda$ かつ $c\le P_A-\lambda$ ならば、$\alpha^*=\alpha^0(P_A-\lambda), P_B^*=P_A-\lambda$ は均衡である。

(f) $\alpha^*$ を3次方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{n_1P_A(1-\alpha)^3}{\tau(n_1+n_2)}-\left\{3-\frac{4sn_1+n_2}{n_1+n_2}\right\}(1-\alpha)^2\\
&+\frac{2}{P_A}\left(2s\tau+\frac{n_2}{2n_1}\tau-\frac{11}{4}P_A+\frac{9}{4}\lambda+\frac{5}{4}c\right)(1-\alpha)\\
&-\frac{(s+\frac{n_2}{4n_1})\tau(5P_A-3c-3\lambda)}{P_A^2}=0
\end{aligned}
$$

の解とし、$P_B^*=P_B^0(\alpha)$ とする。このとき、$1-\frac{(1-4s)\tau}{4P_A}<\alpha^*$ かつ $\frac{P_B^*-\lambda}{P_A}<\alpha^*$ かつ $\max\{P_A-\lambda, c\}<P_B^*<\alpha^*P_A+\lambda$ を満たすならば $(\alpha^*, P_B^*)$ は均衡である。

## 5 数値例

この節では、前節で得られた均衡結果についていくつかの数値例を与える。
例 1.
$n_1=1000$, $n_2=700$,$s=0.1$, $\lambda=400$, $\tau=900$, $P_A=700$, $c=300$, $k=400$
とする。このとき、均衡解は $\alpha^*=1$,$P_B^*=700$ となり、店舗 A の割引販売価格は 700、店舗 B の

通常販売価格は 700 である。これは、(a) のケースにあてはまる。また、これらに対応する各店舗の収益は店舗 A で 169600、店舗 B で 169600 となる。

例 2.

$n_1 = 1000,\ n_2 = 800,\ s = 0.09,\ \lambda = 100,\ \tau = 10000,\ P_A = 500,\ c = 100,\ k = 400$

とする。このとき、均衡解は $\alpha^* = 0.6, P_B^* = 400$ となり、店舗 A の割引販売価格は 300、店舗 B の通常販売価格は 400 である。これは、(b) のケースにあてはまる。また、これらに対応する各店舗の収益は店舗 A で 119600、店舗 B で 89600 となる。

例 3.

$n_1 = 1000,\ n_2 = 900,\ s = 0.15,\ \lambda = 100,\ \tau = 900,\ P_A = 600,\ c = 100,\ k = 20$

とする。このとき、均衡解は $\alpha^* = 0.85, P_B^* = 500$ となり、店舗 A の割引販売価格は 510、店舗 B の通常販売価格は 500 である。これは、(c) のケースにあてはまる。また、これらに対応する各店舗の収益は店舗 A で 156805、店舗 B で 226980 となる。

$\alpha P_A < P_B$ の場合や、$\alpha P_A > P_B$ の場合があるが、$P_B$ の値は $P_A$ を超えることはない。$P_B$ は比較的 $\alpha P_A$ に近い値を取ることがわかかった。また、収益は価格に依存しているとはいえず、店舗 $A, B$ の収益が逆転するケースも見られた。例 1 のように $\alpha = 1$ のときは割引なしの価格で販売すべきである場合も得られた。

## 6 まとめと今後の課題

ハーフタイムの営業時間を持つ複占小売市場において、店舗 A の営業時間の開店時刻直後と閉店時刻直前にサービスタイムを導入したモデルを新たに提案した。買い物客の同一の効用関数を用いて店舗 A にて割引販売価格で購入する買い物客数、同店舗で通常価格で購入する買い物客数と店舗 B にて通常価格で購入する買い物客を求めた。そして、それぞれの客数に対して両店舗の利得関数を導き、店舗 A では利得を最大にする割引率と店舗 B では利得を最大にする価格を求めた。それらから本モデルにおける均衡解を導いた。最後に、均衡解について数値例を挙げた。パラメータの値によっては店舗 A の割引率が 1 より小さい値で均衡状態に至るような結果を得ることができ、2 つのサービスタイムを導入した我々のモデルの有効性が示された。一方、均衡解において店舗 A の割引率が 1 となったケースではサービスタイムを導入する必要がないことが言えた。今後の課題は、2 店舗の営業時間が非対称な場合においての均衡解に関する研究が考えられる。

## 参考文献

[1] Inderst, R. and Irmen, A. (2005) Shopping hours and price competition, European Economics Review, vol.49, 1105-1124.

[2] Shy, O. and Stenbacka, R. (2008) Price competition, business hours and shopping time flexibility, Economics Journal, vol.118, 1171-1195.

[3] Shy, O. and Stenbacka, R. (2006) Service hours with asymmetric distributions of ideal service time, International Journal of Industrial Organization, vol.24, 763-771.

[4] Tangay, G., Vallee, L. and Lanoie, P. (1995) Shopping hours and price levels in the retailing industry: a theoretical and empirical analysis, Economics Inquiry, vol.33, 516-524.